CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES 1983

(Programme T')

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PRÉAMBULE

1° $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre réelle des matrices carrées d'ordre deux sur $\mathbb{R}$ (les matrices nulle et unité de cette algèbre étant respectivement notées O et I), et $\mathfrak{M}_{21}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices unicolonnes à deux éléments sur $\mathbb{R}$.

Pour tout élément A de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, on entend par valeur propre de A, toute racine dans $\mathbb{C}$ de son polynôme caractéristique $\det(A - xI)$, donc, éventuellement, un nombre complexe non réel, et, pour toute valeur propre *réelle* λ de A, espace propre de A associé à λ, le sous-espace vectoriel :

$$\{ X \in \mathfrak{M}_{21}(\mathbb{R}) \ / \ (A - \lambda I) X = 0 \}$$

de $\mathfrak{M}_{21}(\mathbb{R})$.

De façon analogue, si A et B sont deux éléments de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, on dit que B est semblable à A, s'il existe une matrice inversible P de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P.A.P^{-1}$.

2° Pour tout couple (x, y) de réels, on désigne respectivement par $E(x, y)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$ les éléments suivants de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$:

$$E(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad G(x, y) = \begin{pmatrix} x \cos y & -x \sin y \\ x \sin y & x \cos y \end{pmatrix}$$

3° On rappelle que, sur tout espace vectoriel réel de dimension finie, ce qui est notamment le cas de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, toutes les normes sont équivalentes.

Pour toute suite infinie d'éléments de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, les notions de convergence et de limite éventuelle s'entendent donc dans l'espace métrique associé à l'espace vectoriel normé $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \| \ \|)$, où d'après le rappel précédent, $\| \ \|$ est l'une quelconque des normes sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que les deux applications $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_2$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ ainsi définies :

— pour toute matrice A de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $\|A\|_\infty = \sup(|a|, |b|, |c|, |d|)$ et $\|A\|_2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$ sont des normes sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

PREMIÈRE PARTIE

I.1. *a.* Déterminer les valeurs propres et les espaces propres éventuels des éléments suivants de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$:

$E(\lambda_1, \lambda_2)$, avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

$F(\lambda, 1)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$G(\rho, \theta)$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$

.../...

b. Pour tout entier naturel non nul n, calculer la puissance $n^{ième}$ des éléments suivants de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$:

$$E(\lambda_1, \lambda_2), \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$F(\lambda, \mu), \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$$G(\rho, \theta), \quad \text{avec} \quad (\rho, \theta) \in (\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}$$

I.2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ un élément quelconque de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Calculer $A^2 - (a + d) A + (ad - bc) I$;

b. Dans le cas où A admet deux valeurs propres complexes non réelles $\mu + i\nu$ et $\mu - i\nu$ ($\mu \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}^*$), soient e_1 un élément non nul de $\mathfrak{M}_{21}(\mathbb{R})$ et $e_2 = \frac{-1}{\nu}(A - \mu I) e_1$.

Vérifier que $e_1 = \frac{1}{\nu}(A - \mu I) e_2$.

Démontrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathfrak{M}_{21}(\mathbb{R})$.

En déduire que A est semblable à $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$.

c. Démontrer que tout élément A de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de l'une et de l'une seulement, des trois formes suivantes :

$$E(\lambda_1, \lambda_2), \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$F(\lambda, 1), \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$G(\rho, \theta), \quad \text{avec} \quad \rho \in \mathbb{R}_+^*, \ \theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$$

I.3. *a.* Pour chacun des éléments suivants de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$:

$$E(\lambda_1, \lambda_2), \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$F(\lambda, 1), \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$G(\rho, \theta), \quad \text{avec} \quad \rho \in \mathbb{R}_+^*, \ \theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$$

Déterminer l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec lui.

b. Démontrer que si A et B sont deux éléments de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent, il existe un élément inversible P de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ tel que *l'une au moins* des trois conditions suivantes soit satisfaite :

i. $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A = P^{-1} E(\lambda_1, \lambda_2) P \quad \text{et} \quad B = P^{-1} E(\lambda'_1, \lambda'_2) P$$

ii. $\exists\ \lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A = P^{-1} F(\lambda, \mu) P \quad \text{et} \quad B = P^{-1} F(\lambda', \mu') P$$

iii. $\exists\ \rho, \rho' \in \mathbb{R}_+ \quad \exists\ \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A = P^{-1} G(\rho, \theta) P \quad \text{et} \quad B = P^{-1} G(\rho', \theta') P$$

.../...

Deuxième partie

II. Pour tout élément A de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ la borne supérieure des modules de ses valeurs propres.

Pour tout nombre réel strictement positif R, on note D(R) l'ensemble des éléments A de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $\sigma(A) < R$.

II.1.*a*. Soit A un élément de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que :

$$\sigma(A) = 0 \Leftrightarrow A^2 = 0$$

b. Dans chacun des deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & y \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

Calculer $\sigma(A)$ en fonction de x et de y, et représenter dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle l'ensemble des points (x, y) pour lesquels $\sigma(A) < 1$.

c. Dans le cas où $A = \begin{pmatrix} x+y & z \\ z & x-y \end{pmatrix}$, où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner en fonction de x, y et de z, une condition nécessaire et suffisante pour que $\sigma(A) < 1$, et représenter dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle l'ensemble des points (x, y, z) pour lesquels $\sigma(A) < 1$.

(On trouvera une partie de $\mathbb{R}^3$ qui est de révolution autour de Ox; on pourra donc se borner à dessiner son intersection avec le plan xOy, par exemple.)

II.2.*a*. Démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad \sup(x, y) = \frac{1}{2}\left(|x - y| + (x + y) \right)$;

b. Démontrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}(|s^2 - 4p| + |s|^2)$ où $s = z_1 + z_2$ et $p = z_1 z_2$.

En déduire $|z_1| + |z_2|$ et $\big||z_1| - |z_2|\big|$ en fonction de s et de p.

c. Démontrer que l'application $\sigma : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ (définie par $A \longrightarrow \sigma(A)$) est continue.

d. Démontrer que, pour tout réel strictement positif R, D(R) est un ouvert contenant O. Cet ouvert est-il borné?

II.3.*a*. Pour tout entier naturel non nul n, calculer, en fonction de $\sigma(A)$ et de n, et éventuellement de μ,

$\|A^n\|_\infty$, dans les deux cas où :

$$A = E(\lambda_1, \lambda_2), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad A = F(\lambda, \mu) \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

et $\|A^n\|_2$, dans le cas où :

$$A = G(\rho, \theta), \quad (\rho, \theta) \in (\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}$$

b. Démontrer que, pour toute norme $\|\ \|$ sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et pour tout élément inversible P de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, l'application

$$\|\ \|_P : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

définie par $A \longrightarrow \|P^{-1} AP\|$ est une norme sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

II.4. Soient A un élément quelconque de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et $\| \ \|$ une norme quelconque sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que :

a. $$r \in \mathbb{R},\ r > \sigma(A) \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}_+^* / \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \| A^n \| \leqslant k r^n$$

b. $$r \in \mathbb{R},\ r \leqslant \sigma(A) \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}_+^* / \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \| A^n \| \geqslant k r^n$$

Troisième partie

Étant donnée une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, nous dirons que **la série de terme général M_n est convergente ou divergente,** selon que la suite $\left(\sum_{p=0}^{n} M_p \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ou divergente dans l'espace vectoriel réel de dimension finie $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans le cas où la série de terme général M_n est convergente, $\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{p=0}^{n} M_p \right)$ sera appelée sa somme et notée $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$.

III.1. Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Soit, pour tout entier naturel n, $M_n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$.

Démontrer que, pour que la série de terme général M_n converge, il faut et il suffit que les quatre séries réelles de termes généraux a_n, b_n, c_n et d_n convergent, et que, lorsque cette condition est satisfaite :

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n & \sum_{n=0}^{\infty} c_n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n & \sum_{n=0}^{\infty} d_n \end{pmatrix}$$

b. Démontrer que si la série de terme général M_n est convergente, pour tout élément A de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, les séries de termes généraux AM_n et M_nA sont convergentes, et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} AM_n = A \left(\sum_{n=0}^{\infty} M_n \right) \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_n A = \left(\sum_{n=0}^{\infty} M_n \right) A$$

c. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que :

— une condition nécessaire de convergence de la série de terme général M_n est $\lim_{n \to \infty} \| M_n \| = 0$;

— une condition suffisante de convergence de la série de terme général M_n est que la série de terme général $\| M_n \|$ converge.

III.2. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ une série entière réelle, r son rayon de convergence, que nous supposerons non nul, et f sa somme, et A un élément de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Démontrer que :

si $\sigma(A) < r$ la série de terme général $\alpha_n A^n$ est convergente,

si $\sigma(A) > r$ la série de terme général $\alpha_n A^n$ est divergente.

b. Dans chacun des deux cas

$$A = E(\lambda_1, \lambda_2), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad A = F(\lambda, \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

donner, lorsque $\sigma(A) < r$, les éléments de la matrice $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n$ en fonction de f et des éléments de A.

III.3. Soit la série entière réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ de rayon de convergence 1 et de somme $\mathrm{Log}(1+x)$.

Dans toute la suite de ce problème, φ désignera l'application $D(1) \longrightarrow \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} A^n$.

a. Dans chacun des deux cas envisagés au III.2.*b.* déterminer la matrice $\varphi(A)$.

b. Démontrer que, pour $\rho \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les deux séries de termes généraux : $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \rho^n \cos n\theta$, $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \rho^n \sin n\theta$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont convergentes, et calculer leurs sommes.

(On pourra faire intervenir les deux séries entières :

$$\left.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \cos n\theta \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \sin n\theta\right)$$

c. Déterminer la matrice $\varphi(A)$ dans le cas où :

$$A = G(\rho, \theta), \qquad \rho \in [0, 1[, \ \theta \in \mathbb{R}$$

On exprimera les éléments de $\varphi(A)$ en fonction du module de $1 + \rho e^{i\theta}$ et de celui de ses arguments qui appartient à $\left]-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\right[$.

III.4. Soient A et B deux éléments de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent et vérifient $A \in D(1)$, $B \in D(1)$, $AB + A + B \in D(1)$. Vérifier que :

$$\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(AB + A + B)$$

(On pourra utiliser 1.3.*b.* et III.1.*b.*)